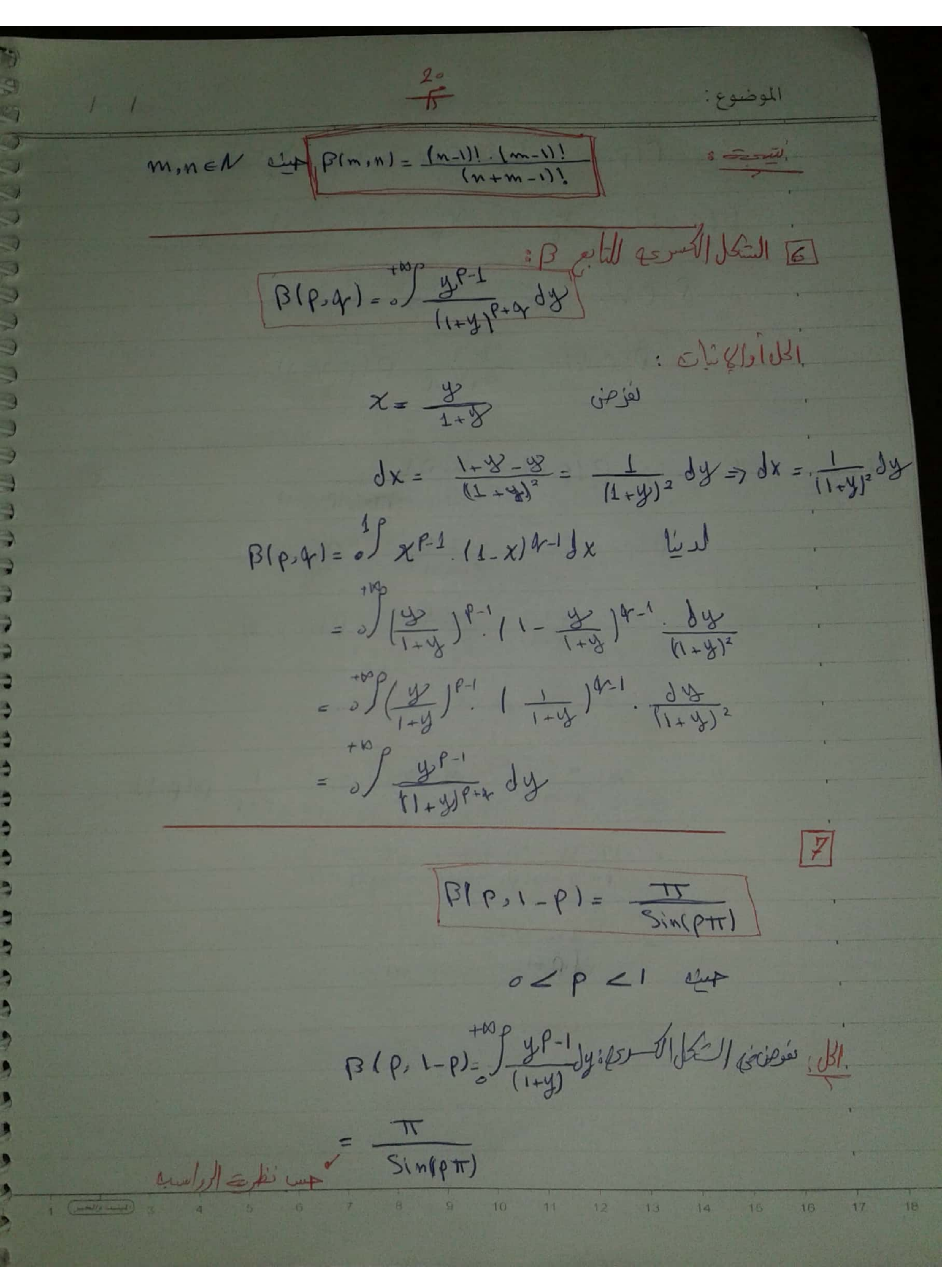


نتيجة :

$$\beta(m,n) = \frac{(n-1)!\,.\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$$ حيث $m,n \in N$

---

6 الشكل الكسري للتابع β :

$$\beta(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy$$

الحل أو الإثبات :

نفرض $x = \frac{y}{1+y}$

$$dx = \frac{1+y-y}{(1+y)^2} = \frac{1}{(1+y)^2}\,dy \Rightarrow dx = \frac{1}{(1+y)^2}\,dy$$

لدينا $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,.\,(1-x)^{q-1}\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1} . \left(1 - \frac{y}{1+y}\right)^{q-1} . \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1} . \left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1} . \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy$$

7

$$\beta(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

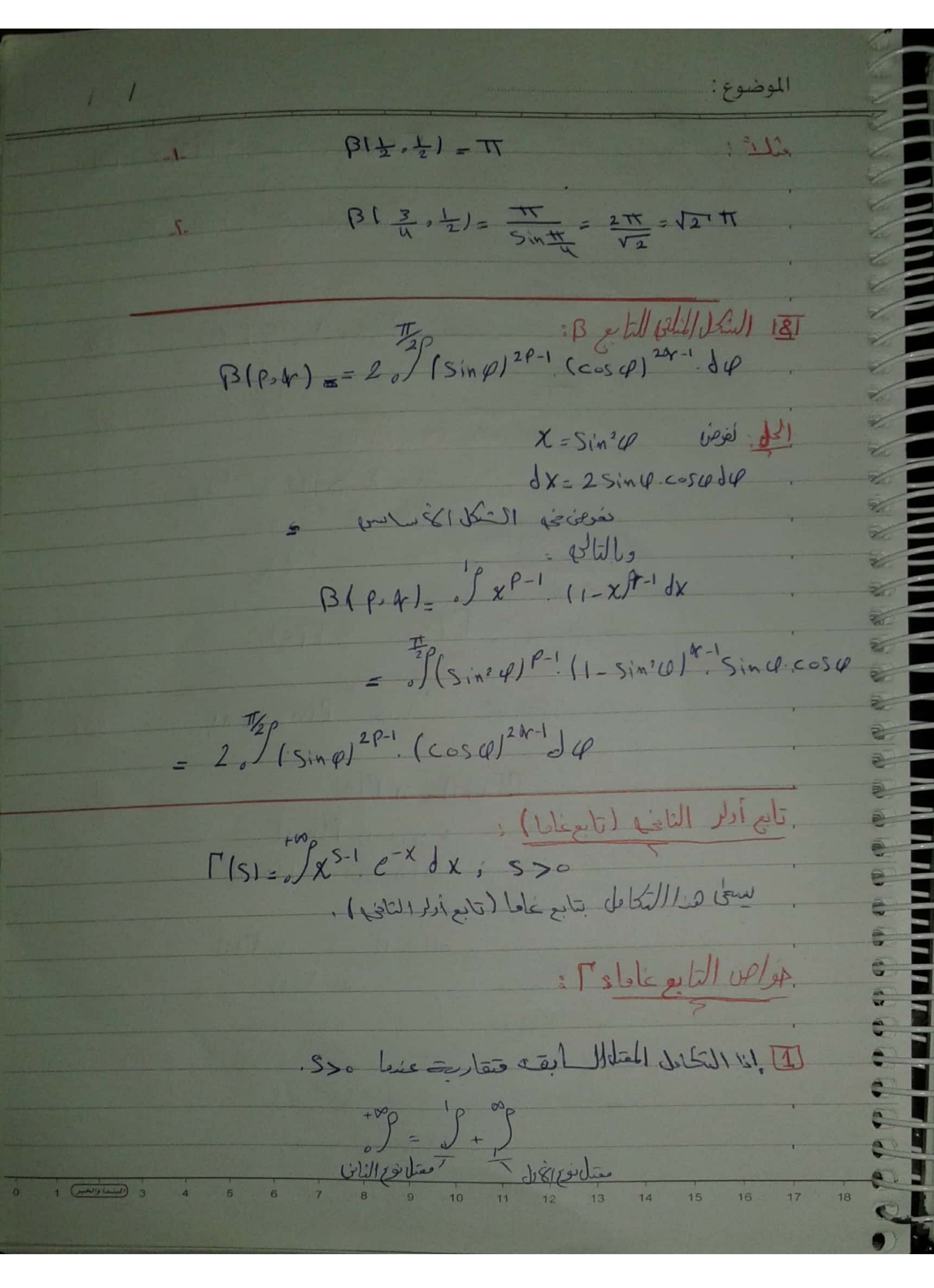
حيث $0 < p < 1$

الحل : نعوض في الشكل الكسري :

$$\beta(p,1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

حسب نظرية الرواسب ✓



الموضوع :   / /

مثال ١ :

1. $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$

2. $\beta(\frac{3}{4},\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi$

8 الشكل المثلثي للتابع β :

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{2p-1}\cdot(\cos\varphi)^{2q-1}\, d\varphi$$

الحل: نفرض $x = \sin^2\varphi$

$dx = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\, d\varphi$

نعوض في الشكل الأساسي

وبالتالي :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\varphi)^{p-1}\cdot(1-\sin^2\varphi)^{q-1}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{2p-1}\cdot(\cos\varphi)^{2q-1}\, d\varphi$$

تابع أولر الناقص (تابع غاما) :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\cdot e^{-x}\, dx \; ; \; s>0$$

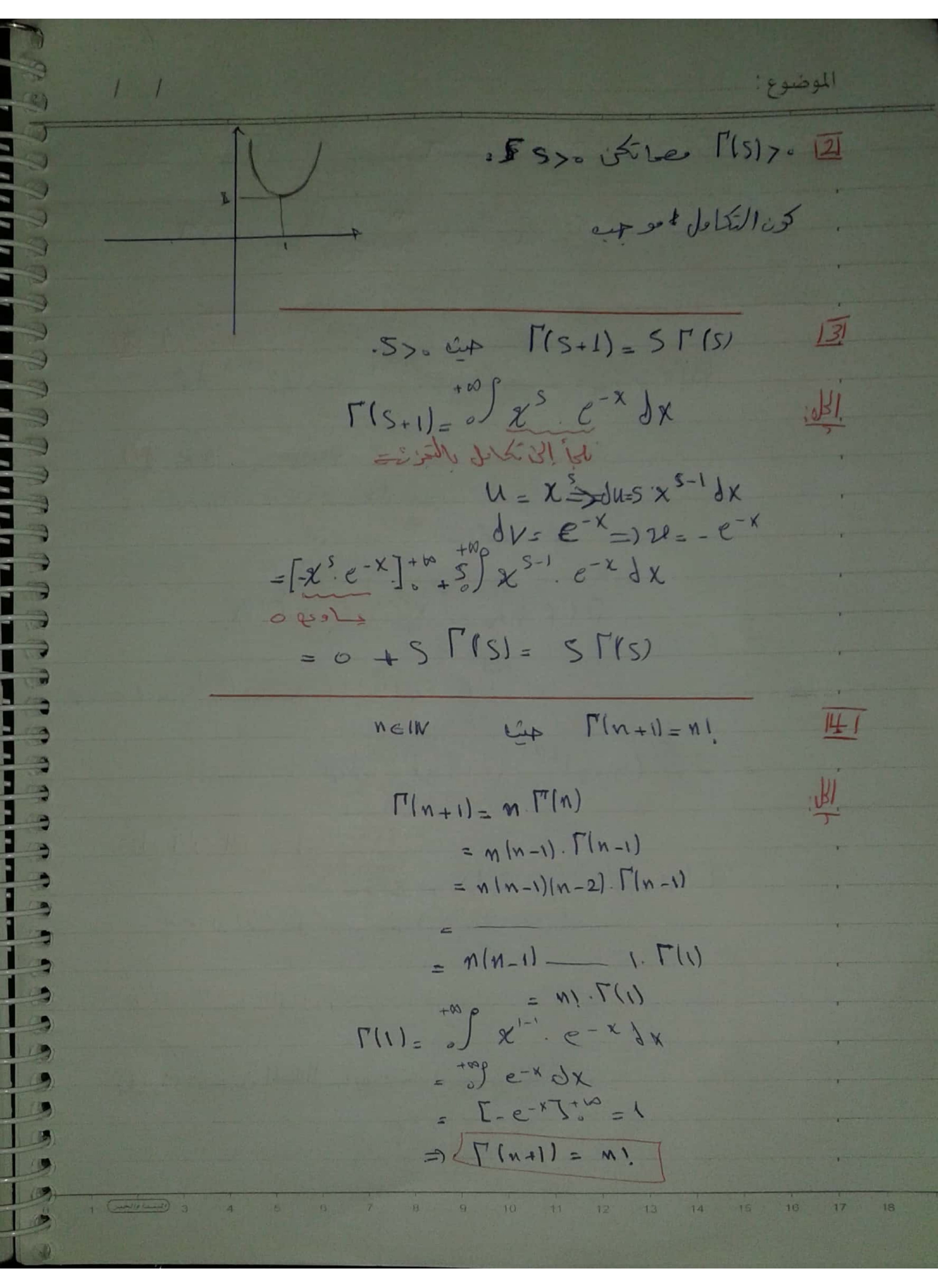
يسمى هذا التكامل بتابع غاما (تابع أولر الناقص).

خواص التابع غاما Γ :

1 إن التكامل المعتل السابق متقارب عندما $s>0$.

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$$

معتل نوع الثاني   معتل نوع الأول



الموضوع :   / /

[2] $\Gamma(s)>0$ مهما تكن $s>0$.

كون التكامل موجب

---

[3] $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)$ حيث $s>0$.

الحل:

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} x^{s}\, e^{-x}\, dx$$

نلجأ إلى التكامل بالتجزئة

$$u=x^{s} \Rightarrow du=s\,x^{s-1}\,dx$$

$$dv=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$$

$$=\left[-x^{s}\cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} x^{s-1}\cdot e^{-x}\, dx$$

يساوي 0

$$=0+s\,\Gamma(s)=s\,\Gamma(s)$$

---

[4] $\Gamma(n+1)=n!$ حيث $n\in\mathbb{N}$

الحل:

$$\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)$$

$$=n(n-1)\cdot\Gamma(n-1)$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdot\Gamma(n-1)$$

$$= ____$$

$$=n(n-1)\,____\,1\cdot\Gamma(1)$$

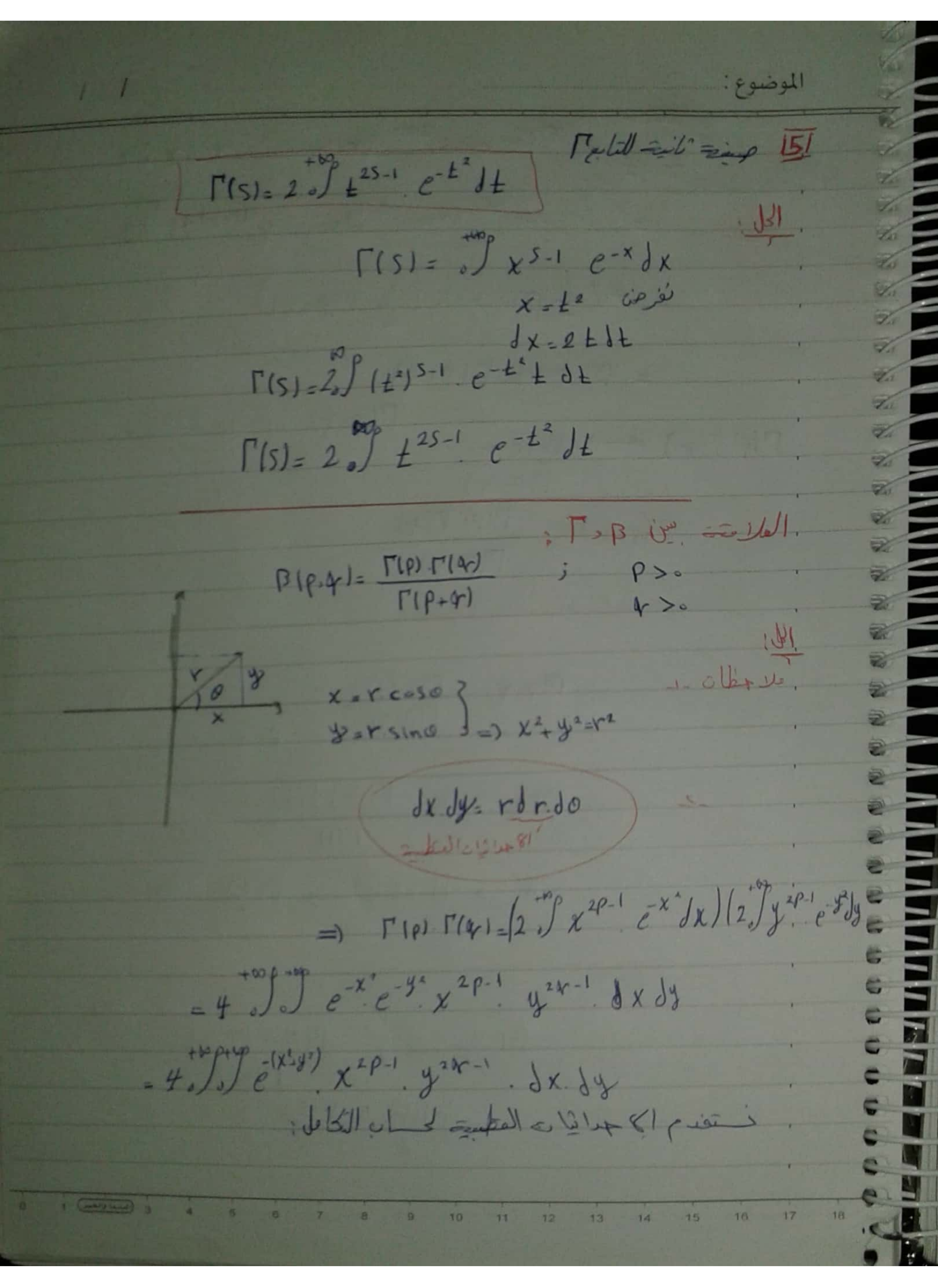
$$=n!\cdot\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} x^{1-1}\cdot e^{-x}\, dx$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(n+1)=n!}$$



الموضوع :

أ/5 صيغة ثانية للتابع Γ

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} t^{2s-1}\, e^{-t^2}\, dt$$

الحل

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx$$

نفرض $x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{\infty} (t^2)^{s-1}\, e^{-t^2}\, t\, dt$$

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{\infty} t^{2s-1}\, e^{-t^2}\, dt$$

العلاقة بين β و Γ :

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad ; \quad p>0,\; q>0$$

الحل :

ملاحظات :

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2=r^2$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

الإحداثيات القطبية

$$\Rightarrow \Gamma(p)\,\Gamma(q) = \left(2\int_0^{+\infty} x^{2p-1}\, e^{-x^2}\, dx\right)\left(2\int_0^{+\infty} y^{2q-1}\, e^{-y^2}\, dy\right)$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, e^{-y^2}\, x^{2p-1}\, y^{2q-1}\, dx\, dy$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, x^{2p-1}\, y^{2q-1}\, dx\, dy$$

نستخدم الإحداثيات القطبية لحساب التكامل :

Scanned by CamScanner

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} (r \cos\theta)^{2p-1} (r \sin\theta)^{2q-1} \cdot r \, dr \, d\theta$$

نحن موجودين في الربع الأول

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1} d\theta \cdot \int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} \beta(p,q) \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \Gamma(p+q) \right)$$

$$= \beta(p,q) \cdot \Gamma(p+q)$$

نقسم الطرفين على $\Gamma(p+q)$

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) \longleftrightarrow = \frac{\beta(p,q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

مثال:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$p = q = \frac{1}{2}$$

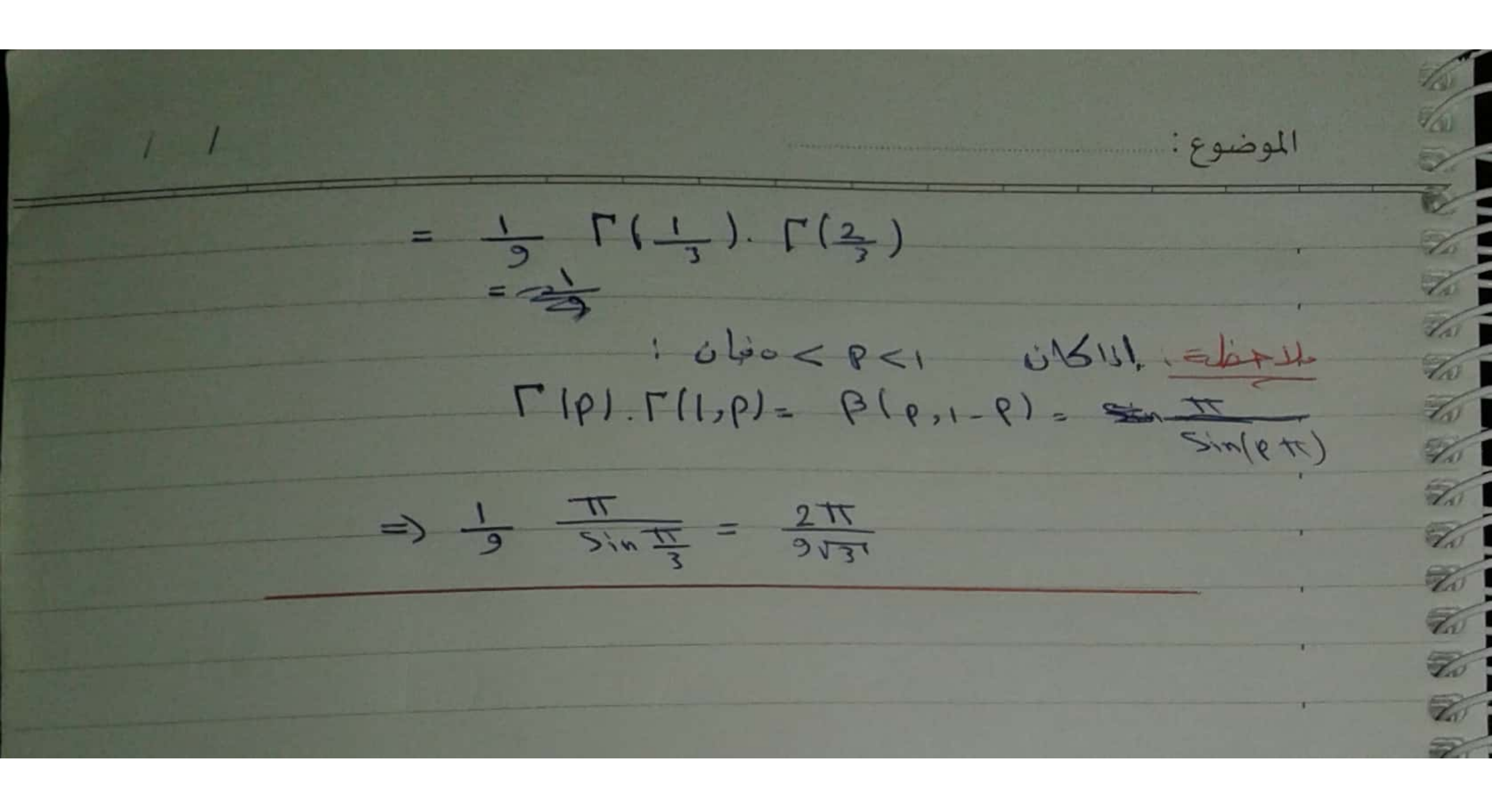
$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$$

$$\pi = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال: احسب:

$$\beta\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{4}{3}) \cdot \Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \Gamma(\frac{1}{3}) \cdot \frac{2}{3} \Gamma(\frac{2}{3})}{2}$$



الموضوع :
/ /

$$= \frac{1}{9}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

ملاحظة : إذا كان $0 < p < 1$ فإن :

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \beta(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$